NOTA	

DATOS PERSONALES. USAR LÁPIZ PASTA y LETRA MAYÚSCULA:

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:
Número de RUT:	Número de MATRICULA:	CARRERA:

Firma

Instrucciones:
- **NO HAY CONSULTAS**.
- Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Las respuestas desordenadas, no serán corregidas.
- Recuerde que debe realizar su prueba en **SU** sección.
- Queda totalmente prohibido el uso de calculadoras programables
- Apagar y guardar sus **c**elulares.

Nota=$1+\dfrac{Puntos}{10}$.

Duración= 60 minutos

CORRECCIóN

Pregunta 1	
Pregunta 2	
Pregunta 3	
TOTAL PUNTOS	

1) **[20 ptos.]** Considere los subespacios $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : z + 2y - 2x = 0, w + x = 0\}$ y $T = \langle\{(1, -1, 4, -1), (1, 0, 0, 1), (-1, -2, 2, 1)\}\rangle$ de $\mathbb{R}^4$.

   a) Determine una base para $S \cap T$

   b) Calcule $dim(S + T)$

Solución:

a) **[10 puntos]** Caracterizamos T:

$$\alpha(1, -1, 4, -1) + \beta(1, 0, 0, 1) + \gamma(-1, -2, 2, 1) = (x, y, z, w)$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \gamma &= x \\ -\alpha - 2\gamma &= y \\ 4\alpha + 2\gamma &= z \\ -\alpha + \beta + \gamma &= w \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & |x \\ -1 & 0 & -2 & |y \\ 4 & 0 & 2 & |z \\ -1 & 1 & 1 & |w \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1, F_3-4F_1, F_4+F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & |x \\ 0 & 1 & -3 & |x+y \\ 0 & -4 & 6 & |z-4x \\ 0 & 2 & 0 & |w+x \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3+2F_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & |x \\ 0 & 1 & -3 & |x+y \\ 0 & 0 & 6 & |z-2x+2w \\ 0 & 2 & 0 & |w+x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & |x \\ 0 & 0 & 0 & |\mathcal{P} \\ 0 & 0 & 6 & |z-2x+2w \\ 0 & 2 & 0 & |w+x \end{pmatrix}$$

donde $\mathcal{P} : x - 2y - z - w = 0$.

5 puntos

Luego,

$$S \cap T \begin{cases} -2x + 2y + z = 0 \\ x + w = 0 \\ x - 2y - z - w = 0 \end{cases}$$

de donde $x = -w$, $z = -2y - 2w$ y $(x, y, z, w) = (-w, y, -2y - 2w, w) = y(0, 1, -2, 0) + w(-1, 0, -2, 1)$, esto es

$$\mathcal{B}_{S\cap T} = \{(0, 1, -2, 0), (-1, 0, -2, 1)\}.$$

5 puntos

b) **[10 puntos]** Ahora calculamos una base para S

$$S \begin{cases} z = 2x - 2y \\ w = -x \end{cases},$$

$(x, y, z, w) = (x, y, 2x - 2y, -x) = x(1, 0, 2, -1) + y(0, 1, -2, 0)$. Así,

$$\mathcal{B}_S = \{(1, 0, 2, -1), (0, 1, -2, 0)\}.$$

5 puntos

$$dim(S + T) = dim(S) + dim(T) - dim(S \cap T) = 2 + 3 - 2 = 3$$

5 puntos

2) **[20 ptos.]** Considere los puntos $A_1 = (2, 3, -5)$, $A_2 = (1, -1, 3)$ y $A_3 = (-7, 5, -25)$ en $\mathbb{R}^3$.

a) Determine la ecuación del plano $\mathcal{P}$ que contiene los puntos A_1, A_2 y A_3.

b) ¿Es $\mathcal{P}$ subespacio de $\mathbb{R}^3$?. Justifique su respuesta.

***Solución*:**

a) **[10 puntos]** Sea $\mathbf{u} = \overrightarrow{A_3A_1} = 9\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + 20\hat{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{v} = \overrightarrow{A_3A_2} = 8\hat{\mathbf{i}} - 6\hat{\mathbf{j}} + 28\hat{\mathbf{k}}$,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 9 & -2 & 20 \\ 8 & -6 & 28 \end{vmatrix} = 64\hat{\mathbf{i}} - 92\hat{\mathbf{j}} - 38\hat{\mathbf{k}}$$

5 puntos

La ecuación del plano $\mathcal{P}$ es: $64(x+7) - 92(y-5) - 38(z+25) = 0$, es decir,

$$32x - 46y - 19z = 21$$

5 puntos

b) **[10 puntos]** $\mathcal{P}$ no es subespacio de $\mathbb{R}^3$ pues $\vec{0} \notin \mathcal{P}$

3) **[20 ptos.]** En el espacio vectorial $V = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, sea $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\}$ la base canónica de V.

Sea $[\mathbf{p}(x)]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, el polinomio $\mathbf{p}(x)$ en la base $\mathcal{B}_1$.

a) Si $\mathcal{B}_2 = \{4x - 1, 2x^2 - x, 3x^2 + 3\}$, encuentre la matriz cambio de base (transición) de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$.

b) Escriba $\mathbf{p}(x)$ en términos de la base $\mathcal{B}_2$

***Solución*:**

a) **[10 puntos]** Sea A la matriz de transición de B_1 a B_2. Calcularemos A^{-1}.

$$(4x-1)_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2x^2 - x)_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (3x^2+3)_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Finalmente

$$A = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 \\ -12 & -3 & 12 \\ 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) **[10 puntos]** $A \cdot [\mathbf{p}(x)]_{\mathcal{B}_1} = [\mathbf{p}(x)]_{\mathcal{B}_2}$. Entonces

$$[\mathbf{p}(x)]_{\mathcal{B}_2} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 \\ -12 & -3 & 12 \\ 8 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 5/3 \\ 5/9 \end{pmatrix}$$